



Lineare Algebra (Informatik)

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (Rechenregeln auf Ringen)

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und seien $a, b, c \in R$. Zeigen Sie, dass folgende Rechenregeln gelten:

(i) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

(ii) Falls ein Einselement $1 \in R$ existiert, dann gilt:

$$-a = (-1) \cdot a = 1 \cdot (-a)$$

(iii) Falls R nullteilerfrei ist, also falls $\forall a, b \in R : a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$, dann gilt:

$$(c \neq 0 \wedge a \cdot c = b \cdot c) \Rightarrow a = b \quad \text{und} \quad (c \neq 0 \wedge c \cdot a = c \cdot b) \Rightarrow a = b$$

Lösung 1

(i) Wir bemerken als Erstes, dass für alle $c \in R$ gilt:

$$-(-c) = c,$$

denn sowohl c als auch $-(-c)$ sind invers zu $-c$ bezüglich $+$, und nach Satz 3.1.1 sind Inversen in Gruppen eindeutig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) &= -(a \cdot (-b)) \quad [\text{Satz 3.2.2 (2)}] \\ &= -(-(a \cdot b)) \quad [\text{Satz 3.2.2 (2)}] \\ &= a \cdot b. \end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} -a &= 1 \cdot (-a) \quad [\text{Def. vom Einselement}] \\ &= (-1) \cdot a \quad [\text{Satz 3.2.2 (2)}] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -a &= (-a) \cdot 1 \quad [\text{Def. vom Einselement}] \\ &= a \cdot (-1). \quad [\text{Satz 3.2.2 (2)}] \end{aligned}$$

Bemerkung: Diese Aussage gilt auch für nicht-kommutative Ringe.

(iii) Angenommen, $c \neq 0$ und $a \cdot c = b \cdot c$.

$$\begin{aligned} a \cdot c = b \cdot c &\iff a \cdot c + (-b \cdot c) = 0 \quad [\text{Eindeutigkeit von add. Inversen}] \\ &\iff a \cdot c + (-b) \cdot c = 0 \quad [\text{Satz 3.2.2 (2)}] \\ &\iff (a + (-b)) \cdot c = 0 \quad [\text{Distributivgesetz}] \\ &= a + (-b) = 0 \vee c = 0. \quad [\text{R nullteilerfrei}] \end{aligned}$$

Da $c \neq 0$ muss also $a + (-b) = 0 \iff a = b$ gelten.

Aufgabe 2 (Komplexe Zahlen)

Betrachten Sie die komplexe Zahlenebene.

- (i) Seien $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$. Veranschaulichen Sie sich anhand einer Skizze die Addition bzw. Subtraktion zweier komplexer Zahlen $(z_1, z_2) \rightarrow z_1 \pm z_2$ sowie die komplexe Konjugation $z \rightarrow \bar{z}$.
- (ii) Betrachten Sie nun die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Auf welche Kurven bildet f Kreise mit Mittelpunkt im Ursprung, auf welche Geraden durch den Ursprung ab? Wie verändert sich der Winkel zwischen zwei Ursprungsgeraden?

Hinweis: Nutzen Sie die Polardarstellung komplexer Zahlen.

Lösung 2 (i)

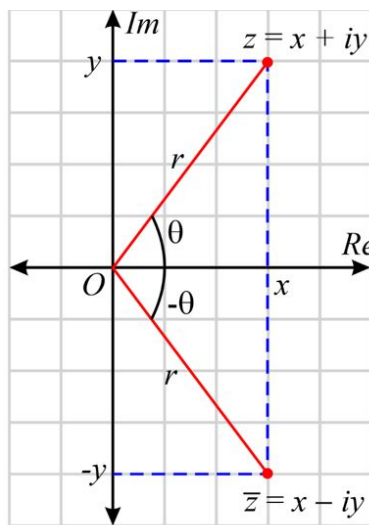


Abbildung 1: Komplexe Konjugation

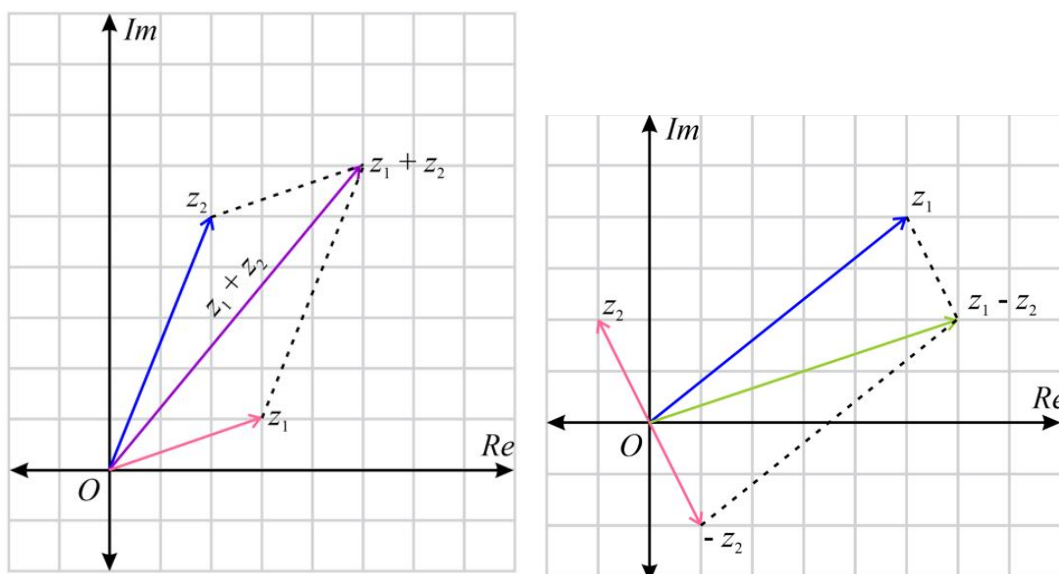


Abbildung 2: Addition und Subtraktion

(ii) Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann lässt sich z eindeutig schreiben als

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

für ein $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$.

Dann ist

$$f(z) = \frac{1}{r \cdot e^{i\varphi}} = \frac{1}{r} \cdot e^{i \cdot (-\varphi)} = \frac{1}{r} \cdot e^{i \cdot (2\pi - \varphi)}.$$

(Bemerkung: $t \mapsto e^{it}$ ist 2π -periodisch.)

Kreise Sei $C_r(p) = \{w \in \mathbb{C} : |w - p| = r\}$ der Kreis mit Radius $r > 0$ um $p \in \mathbb{C}$.

Sei $r > 0$. Da $|r \cdot e^{i\varphi}| = |r| \cdot |e^{i\varphi}| = |r| = r$,

$$C_r(0) = \{r \cdot e^{i\varphi} : \varphi \in [0, 2\pi[\}.$$

$$\begin{aligned} f(C_r(0)) &= \{f(z) : z \in C_r(0)\} \\ &= \{f(r \cdot e^{i\varphi}) : \varphi \in [0, 2\pi[\} \\ &= \left\{ \frac{1}{r} \cdot e^{i \cdot (2\pi - \varphi)} : \varphi \in [0, 2\pi[\right\} \\ &= C_{\frac{1}{r}}(0), \end{aligned}$$

da $[0, 2\pi[\rightarrow]0, 2\pi[$, $\varphi \mapsto 2\pi - \varphi$ bijektiv ist.

(anders gesagt: wenn $z \in C_r(0)$, dann ist $f(z) \in C_{\frac{1}{r}}$, und zu jedem $w \in C_{\frac{1}{r}}$, $w = \frac{1}{r} \cdot e^{i\psi}$ finden wir einen $z \in C_r(0)$ mit $f(z) = w$, nämlich $z = r \cdot e^{i \cdot (2\pi - \psi)}$.)

Geraden Sei $L \subseteq \mathbb{C}$ eine Gerade durch 0. Geraden sind eindeutig durch zwei Punkte definiert, also ist $L = L_\varphi = \{t \cdot e^{i\varphi} : t \in \mathbb{R}\}$ für ein $\varphi \in [0, \pi[$; wir bemerken, dass

$$L_\varphi = \{t \cdot e^{i\varphi} : t \in \mathbb{R}\} = \{t \cdot e^{i\varphi + 2\pi k} : t \in \mathbb{R}\} = L_{\varphi + 2\pi k}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Da f nur auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert ist, müssen wir $t = 0$ ausschließen und das Bild von $L \setminus \{0\}$ untersuchen.

$$\begin{aligned} f(L_\varphi \setminus \{0\}) &= \{f(z) : z \in L_\varphi\} \\ &= \{f(t \cdot e^{i\varphi}) : t \neq 0\} \\ &= \left\{ \frac{1}{t} \cdot e^{i(-\varphi)} : t \neq 0 \right\} \\ &= L_{-\varphi} \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

da $\mathbb{R} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $t \mapsto \frac{1}{t}$ bijektiv ist.

Die Gerade $L_{-\varphi}$ ist die Spiegelung von L_φ an der reellen Achse (alternativ: die Spiegelung an der imaginären Achse – beide sind mögliche Symmetrieachsen hier). Wir beachten aber, dass die Abbildung f die einzelnen Punkte auf L_φ *nicht* einfach spiegelt!

Aufgabe 3 (Quaternionen)

Der Schiefkörper der Quaternionen $\mathbb{H}$ wird wie folgt konstruiert. Quaternionen, d.h. Elemente von $\mathbb{H}$, sind Ausdrücke der Form

$$h = h_0 + ih_1 + jh_2 + kh_3$$

mit $h_0, h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}$ und den drei imaginären Einheiten i, j und k . Die Addition auf $\mathbb{H}$ ist komponentenweise definiert, d.h. für $h, h' \in \mathbb{H}$ ist

$$h + h' := (h_0 + h'_0) + i(h_1 + h'_1) + j(h_2 + h'_2) + k(h_3 + h'_3).$$

Für die Multiplikation auf $\mathbb{H}$ gilt Folgendes:

- Für reelle Zahlen r und r' (mit $r = r + i0 + j0 + k0$) ist die Multiplikation auf $\mathbb{H}$ die übliche Multiplikation auf $\mathbb{R}$.
- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ und $ij = k, jk = i, ki = j$.
- Die imaginären Einheiten vertauschen mit jeder reellen Zahl r , d.h. $ir = ri, jr = rj, kr = rk$.
- Für i, j, k und jede reelle Zahl r gilt das Assoziativgesetz, d.h. $i(ik) = (ii)k, j(ki) = (jk)i, r(jk) = (rj)k$, usw.

Weiter gelten die Distributivgesetze $(h + h')g = hg + h'g$ und $h(g + g') = hg + hg'$. Man kann nun zeigen, dass $\mathbb{H}$ mit dieser Addition und Multiplikation ein Schiefkörper ist, d.h. dass alle Körperaxiome mit Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation erfüllt sind.

- Zeigen Sie, dass die Multiplikation auf $\mathbb{H}$ nicht kommutativ ist und dass insbesondere gilt: $ij = -ji, kj = -jk$ und $ik = -ki$.
- Geben Sie die allgemeine Formel für die Multiplikation zweier Quaternionen h und h' an.
- Geben Sie das neutrale Element der Multiplikation und das inverse Element bezüglich Multiplikation einer Quaternion $h \in \mathbb{H}$ an.

Hinweis: Definieren Sie die konjugierte Quaternion zu h als $\bar{h} := h_0 - ih_1 - jh_2 - kh_3$

Lösung 3

- Wir zeigen, dass $ij = -ji$; die anderen Gleichungen sind analog.

$$-ji = -(ki)i = -k(ii) = -k \cdot (-1) = k = ij.$$

Insbesondere ist Multiplikation auf $\mathbb{H}$ nicht kommutativ.

- Seien $h, g \in \mathbb{H}$ mit $h = h_0 + ih_1 + jh_2 + kh_3$ and $g = g_0 + ig_1 + jg_2 + kg_3$. Dann:

$$\begin{aligned} h \cdot g &= (h_0 + ih_1 + jh_2 + kh_3) \cdot (g_0 + ig_1 + jg_2 + kg_3) \\ &= h_0g_0 + ih_0g_1 + jh_0g_2 + kh_0g_3 \\ &\quad + i(h_1g_0 + i(h_1g_1) + j(h_1g_2) + k(h_1g_3)) \\ &\quad + j(h_2g_0 + i(h_2g_1) + j(h_2g_2) + k(h_2g_3)) \\ &\quad + k(h_3g_0 + i(h_3g_1) + j(h_3g_2) + k(h_3g_3)) \\ &= h_0g_0 + ih_0g_1 + jh_0g_2 + kh_0g_3 \\ &\quad + ih_1g_0 + i^2(h_1g_1) + ij(h_1g_2) + ik(h_1g_3) \\ &\quad + jh_2g_0 + ji(h_2g_1) + j^2(h_2g_2) + jk(h_2g_3) \\ &\quad + kh_3g_0 + ki(h_3g_1) + kj(h_3g_2) + k^2(h_3g_3) \\ &= h_0g_0 - h_1g_1 - h_2g_2 - h_3g_3 \\ &\quad + i(h_0g_1 + h_1g_0 + h_2g_3 - h_3g_2) \\ &\quad + j(h_0g_2 - h_1g_3 + h_2g_0 + h_3g_1) \\ &\quad + k(h_0g_3 + h_1g_2 - h_2g_1 + h_3g_0) \end{aligned}$$

- Das neutrale Element bezüglich Multiplikation ist $1 = 1 + i0 + j0 + k0$; es lässt sich mit der obigen Formel leicht nachprüfen, dass für jedes $h \in \mathbb{H}$ gilt:

$$1 \cdot h = h \cdot 1 = h.$$

Für das Inverse zu h , betrachten wir

$$\bar{h} = h_0 - ih_1 - jh_2 - kh_3.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} h \cdot \bar{h} &= (h_0 + ih_1 + jh_2 + kh_3) \cdot (h_0 - ih_1 - jh_2 - kh_3) \\ &\stackrel{(ii)}{=} (h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) + i0 + j0 + k0 \\ &= h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2. \end{aligned}$$

Analog gilt $\bar{h} \cdot h = h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$.

Wir behaupten, dass

$$h^{-1} = \frac{\bar{h}}{h \cdot \bar{h}} = \frac{h_0}{h \cdot \bar{h}} - i \frac{h_1}{h \cdot \bar{h}} - j \frac{h_2}{h \cdot \bar{h}} - k \frac{h_3}{h \cdot \bar{h}}.$$

Wir überprüfen, dass tatsächlich $h^{-1}h = h \cdot h^{-1} = 1$. Wir bemerken, dass $h \cdot \bar{h}$ reell ist, und deshalb:

$$h^{-1} \cdot h = \frac{\bar{h}}{h \cdot \bar{h}} \cdot h = \frac{1}{h \cdot \bar{h}} (\bar{h} \cdot h) = 1;$$

analog für $h \cdot h^{-1}$.